IES
Profesor Tierno Galván

1.- Ecuaciones de segundo grado.

Resolver las siguientes ecuaciones.

a) $5x^2 - 45 = 0$, despejando $x^2 = 9$, y despejando x (3 y -3 son los únicos números que al elevarlo al cuadrado dan 9) obtengo que x1 = 3 y que x2 = -3

b) $5x^2 + 45 = 0$, despejando x2 = -9, pero no existe ningún número real que al elevarlo al cuadrado de un número negativo, luego NO TIENE SOLUCIÓN**.**

c) $3x^2 - 21x = 0$, sacando factor común $x(3x - 21) = 0$, si el producto de dos números vale 0, o bien vale $x = 0$ (primera solución), o bien $3x - 21$ vale 0, y en este caso x debe valer 7 (ya que $3x = 21$ y $x = 21/7=3$). Luego dos soluciones $x_1 = 0$ y $x_2 = 7$.

d) $x^2 + x - 6 = 0$, aplicando la fórmula $x=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{-1\pm 5}{2}\ sol.\ x_1=2,\ \ x_2=-3$

e) $9x^2 + 6x + 1 = 0$, $x=\frac{-6\pm\sqrt{36-36}}{18}=\frac{-6+0}{18}=\frac{-6}{18}=\frac{-1}{3}\ solución\ única$

f) $5x^2 - 7x + 3 = 0$, $x=\frac{7\pm\sqrt{49-60}}{10}=\frac{7\pm\sqrt{-11}}{10}\ No\ tiene\ solución$

g) $3x^2 - 5x + 1 = 0$, $x=\frac{5\pm\sqrt{25-12}}{6}=\frac{5\pm\sqrt{13}}{6}\ sol.\ x_1=\frac{5+\sqrt{13}}{6},\ \ x_2=\frac{5-\sqrt{13}}{6}$

h) Factoriza la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$. Resolviendo la ecuación se obtienen las soluciones $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$. La factorización de la ecuación es $(x - 2)(x - 3) = 0$. ¡Intenta factorizar por Ruffini el polinomio $x^2 - 5x + 6$¡. ¿Qué raíces tiene el polinomio $x^2 - 5x + 6$?. y ¿qué soluciones tiene la ecuación de segundo grado?

2.- Ecuaciones bicuadradas, tricuadradas,...$ax^4 + bx^2 +c = 0$, $ax^6 + bx^3 +c = 0$

Son aquellas de 4º grado sin términos de grado impar. Para resolverlas hacemos ***un cambio de variable***, hacemos $x^2 = z$ y, por tanto, $x^4 = z^2$. Se obtiene así una ecuación de segundo grado cuya incógnita es z: $az^2 + bz + c = 0$ una vez resuelta se obtienen los correspondientes valores de x. Por cada valor positivo de z habrá dos valores de x, pues $x^2 = z$.

Ejemplo a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \longrightarrow z^2 - 10z + 9 = 0$

$$z=\frac{10\pm\sqrt{100-36}}{2}=\frac{10\pm 8}{2}=\left\{\begin{matrix} z=9\rightarrow x=\pm\sqrt{9}=\pm 3 & x_1=3, x_2=-3 \\ z=1\rightarrow x=\pm\sqrt{1}=\pm 1 & x_3=1,\ x_4=-1 \end{matrix}\right\}$$

luego tiene 4 soluciones enteras

b) $8x^6 - 63x^3 - 8 = 0 \longrightarrow 8z^2 - 63z - 8 = 0$

$$z=\frac{63\pm\sqrt{3969+256}}{6}=\frac{63\pm 65}{16}=\left\{\begin{array}{c} z=8\to x=\sqrt[3]{8}\quad x_1=x_2=x_3=2 \\ z=\frac{-1}{8}\to x=\sqrt[3]{\frac{-1}{8}}=\frac{-1}{2}\quad x_4=x_5=x_6=\frac{-1}{2}\end{array}\right\}$$

tiene 6 soluciones una entera (en realidad una entera 2, y otras dos imaginarias) y una racional (en verdad es una racional y otras dos imaginarias).

3.- Ecuaciones de grado superior.

Son ecuaciones de la forma P(x) = 0, en las cuales el polinomio P(x) se puede descomponer en factores. Las soluciones se obtienen igualando a cero cada factor de la descomposición factorial. El número de soluciones (reales e imaginarias) coincide con el exponente de mayor grado.

Ejemplo, en la ecuación $x^4 - 3x^3 - 13x^2 + 9x + 30 = 0$, el polinomio P(x) se factoriza por Ruffini y queda de la forma siguiente:

$P(x) = (x + 2)(x - 5)(x^2 - 3)$

por lo que la ecuación queda: $(x+2)(x-5)(x^2-3)=0\ \left\{\begin{array}{c} x+2=0\Rightarrow x=-2 \\ x-5=0\Rightarrow x=5 \\ x^2-3=0\Rightarrow \begin{array}{c} x=\sqrt{3} \\ x=-\sqrt{3}\end{array}\end{array}\right\}$

luego, dos soluciones enteras y otras dos irracionales, por lo tanto, las cuatro soluciones son reales.

Si la ecuación no tiene término independiente podemos sacar factor común hasta obtenerlo:

Ejemplo.- Encuentra la soluciones de la ecuación $\mathbf{9x^3 + 6x^2 + x = 0}$. Lo primero que hacemos es sacar factor común **x**, y nos queda $x(9x^2 + 6x + 1) = 0$. Ya tenemos la primera solución, $\mathbf{x_1 = 0}$, para obtener las dos restantes (la ecuación es cúbica) aplicamos la fórmula general:

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{36-36}}{18}=\frac{-6+0}{18}=\frac{-6}{18}=\frac{-1}{3}\ \textit{solución única}$$

en definitiva, las soluciones son todas reales, 0, -1/3 y -1/3, esta última es una solución doble.

Ejemplo.- Resolver la ecuación de cuarto grado: $\mathbf{x^4 - x^3 + 3x^2 - 5x - 10}$. Para poder resolverla por Ruffini, al menos tiene que tener dos soluciones enteras. Efectivamente, si factorizamos por Ruffini el polinomio, obtenemops dos raices enteras: 2 y -1. El polinomio factorizado queda: $(x-2)(x+1)(x^2 + 5)$:

$$(x-2)(x+1)(x^2+5)=0\ \left\{\begin{array}{c} x-2=0\Rightarrow x=2 \\ x+1=0\Rightarrow x=-1 \\ x^2+5\neq 0\Rightarrow \textit{no sol real}\end{array}\right\}$$

la ecuación $x^2 + 5$ no tiene soluciones reales, por lo tanto, diremos entonces que esa ecuación tiene dos soluciones reales $x = 2$ y $x = -1$ y otras dos soluciones no reales (imaginarias)

Ejercicios.-

1.- Resuelve las siguientes ecuaciones utilizando el hecho de que si el producto de dos o más factores es cero, tiene que ser cero al menos uno de ellos:

a) $(x - 1)(x - 2) = 0$ b) $(x - 5)(x + 11) = 0$ c) $(2x+6)x = 0$ d) $(2x - 5)(x - 3) = 0$

e) $(x - 3/4)(8x + 42) = 0$ f) $x(x - 2)(x + 3) = 0$ g) $x^2(x - 2) = 0$ h) $(x - 2)(x + 3)(x + 2) = 0$

2.- Halla las raíces reales de las siguientes ecuaciones de tercer grado, calculando previamente por tanteo alguna raíz:

a) $x^3 - x^2 - 4 = 0$ b) $x^3 - x^2 -x + 1 = 0$ c) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$ d) $6x^3 + x^2 - 26x - 21 = 0$

3.- Halla las raíces reales de las siguientes ecuaciones de cuarto grado calculando previamente por tanteo alguna raíz:

a) $x^4 - x^3 - 16x^2 -20x = 0$ b) $x^4 - 6x^3 - 11x^2 + 96x - 80 = 0$ c) $2x^4 - 5x^3 +5x - 2 = 0$

3.- Ecuaciones Racionales.

Son aquellas en las que aparece la **x** en el denominador (o sea, una fracción algebraica). Para resolverlas es necesario transformarlas en ecuaciones polinómicas.

Ejemplo.- Vamos a resolver la ecuación $\frac{x(x-3)}{x^2-1}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}$ Calculamos el m.c.m. de los denominadores: como $x^2 - 1=(x - 1)(x + 1)$, está claro cual es el mcm. Pasamos a operar, observa como "quito" denominadores (si los dos miembros son iguales teniendo el mismo denominador es que también deben ser iguales los numeradores):

$$\frac{x(x-3)}{x^2-1}=\frac{1(x-1)}{(x+1)(x-1)}-\frac{1(x+1)}{(x-1)(x+1)}\Leftrightarrow x(x-3)=(x-1)-(x+1)$$

ya podemos obtener la ecuación polinómica, cuidado con el signo menos de delante del paréntesis:

$$x^2-3x=x-1-x-1\Leftrightarrow x^2-3x-x+x+1+1=0\Leftrightarrow x^2-3x+2=0$$

ésta ecuación polinómica de segundo grado tiene dos soluciones $x_1=1$ y $x_2=2$

Comprueba estas dos soluciones sustituyendo en la ecuación inicial.

Ejemplo. Resolver $\frac{x}{x+1}+\frac{x}{x-2}=1$. Calculamos el m.c.m. de los denominadores $(x+1)(x-2) = x^2 - x - 2$: $\frac{x(x-2)}{mcm}+\frac{x(x+1)}{mcm}=\frac{1(x-2)(x+1)}{mcm}$ y ahora "quitamos" denominadores y operamos en el numerador:

$$x^2-2x+x^2+x=x^2-2x+x-2 \Leftrightarrow x^2=-2. \textit{ No tiene soluciones reales}$$

Ejercicios.- Resolver las siguientes ecuaciones racionales:

$a)\ \frac{2x}{x+2}+\frac{x+2}{2x}=2 \ sol\ x=2\ (doble)$ $\qquad b)\ \frac{5x+4}{5x-4}+\frac{5x-4}{5x+4}=\frac{13}{6}\ sol\ x=-4\ o\ x=4$

$c)\ \frac{x+1}{x+2}+\frac{x-1}{x-2}=\frac{2x+1}{x+1}\ sol\ x=0\ o\ x=-4$

$d)\ \frac{3(x^2-11)}{5}-\frac{2(x^2-60)}{7}=36\ sol\ x=9\ o\ x=-9$

$e)\ \frac{1}{x}=x$ $\qquad f)\ \frac{3x+2}{x-1}=x+6$

$g)\ \frac{x-3}{x-1}=\frac{x+1}{x+3}+\frac{1}{x-3}$ $\qquad h)\ \frac{5}{(x-2)^2}-\frac{3}{x-2}=\frac{4}{5}$

$i)\ \frac{8}{x^2-3x}-\frac{7}{9-x^2}+\frac{1}{x}=\frac{13}{4}$ $\qquad j)\ \frac{x^2-x-2}{x^3-4x^2+x+6}=\frac{15}{x^2+x}$

4.- Ecuaciones Irracionales.

Son ecuaciones que contienen polinomios o fracciones algebraicas bajo un signo de radical. El procedimiento general consiste en “aislar” un radical en un miembro y posteriormente elevar al cuadrado ambos miembros. Si hay dos radicales radicales se aisla uno de ellos y posteriormente se eleva al cuadrado; aparecerá una raíz que tendrá que aislarse nuevamente.

Ejemplo.- Resolver la ecuación $x-\sqrt{x}=2$

1º Se aisla un radical en uno de los dos miembros, pasando los restantes términos, radicales y no radicales, al otro miembro: $\sqrt{x}=x-2$

2º Se elevan al cuadrado ambos miembros: $(\sqrt{x})^2=(x-2)^2 \ \Leftrightarrow\ x=x^2-4x+4$

3º Si existe todavía algún radical, se repite el proceso.

4º Se resuelve la ecuación obtenida y se comprueba cuáles de las raices obtenidas verifican la ecuación inicial:

$$x^2-5x+4=0 \ \Leftrightarrow\ x_1=4 \ y\ x_2=1$$

Comprobación:

$4-\sqrt{4}=2$ *Si es* x_1 *solución*

$1-\sqrt{1}\neq 2$ *No es* x_2 *solución*

Ejemplo.- Resuelve la siguiente ecuación y analiza los 4 pasos anteriores: $\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=5$

$$\sqrt{x+5}=5-\sqrt{x} \iff x+5=25+x-10\sqrt{x}$$
$$-20=-10\sqrt{x} \iff 400=100x$$
$$x=4$$

Comprobación: $\sqrt{4+5}+\sqrt{4}=5$ *Si es solución*

Ejercicios.-

$a)\ \sqrt{x+4}=7 \quad sol\ x=45$

$b)\ x-\sqrt{25-x^2}=1$

$c)\ x+\sqrt{5x+10}=8 \quad sol\ x=3$

$d)\ x-\sqrt{169-x^2}=17 \quad no\ sol$

$e)\ \sqrt{36+x}=2+\sqrt{x} \quad sol\ x=64$

$f)\ \sqrt{2x+1}+\sqrt{x+4}=6$

$g)\ \sqrt{x+5}+\sqrt{2x+8}=7$

$h)\ \sqrt{7+2x}-\sqrt{3+x}=1$