Departamento de Matemáticas

IES Profesor Tierno Galván

http://matematicas.iestiernogalvan.com

1.-Sistemas de ecuaciones lineales, de primer grado, con dos incógnitas

Resolución gráfica

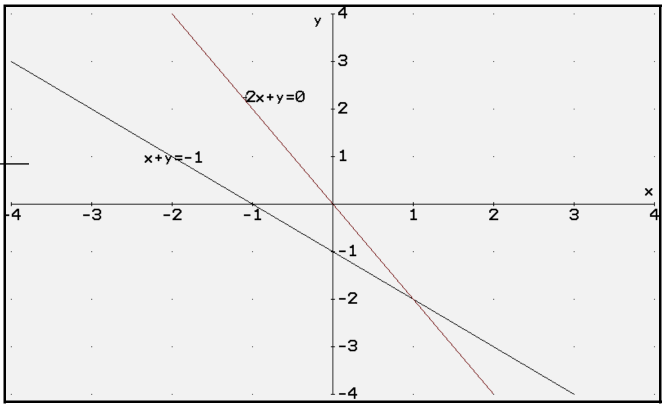
Ejemplo 1.- Supongamos que queremos resolver el sistema de ecuaciones:

$$2x+y=0$$
$$x+y=-1$$

Si damos valores a una de las dos incógnitas y obtenemos los correspondientes a la otra, en cada ecuación del sistema, de cada ecuación obtenemos un conjunto de puntos (x , y), que representados en los ejes de coordenadas, dan lugar a **una recta**. Vamos a comprobarlo

En este caso, obtenemos: Para la primera ecuación **2x + y = 0**, los puntos (0,0); (1,-2), suficientes para representar la recta (*una recta queda perfectamente definida con sólo dos puntos*).

Para la segunda ecuación **x + y = -1**, los puntos (0,-1) , (3,-4) para representar la segunda.

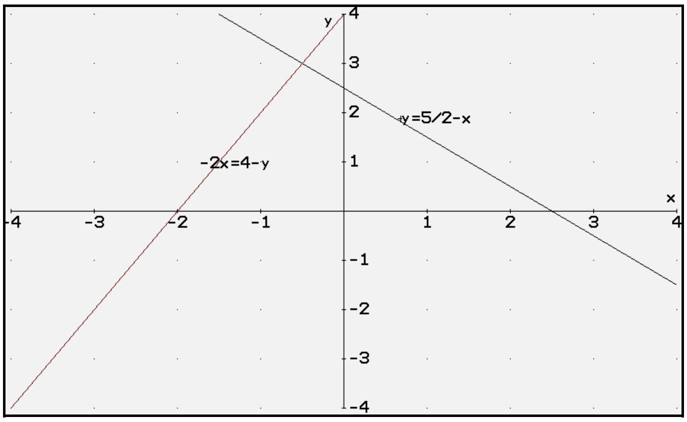


Obsérvese la escena siguiente que representa ambas rectas. Como puede verse las dos rectas se cortan en el punto de coordenadas (1,-2). ¿Cuánto valen la **x** y la **y** en ese punto?. La **x** vale 1, e **y** vale –2. Sustituye dicho valor de **x** e **y** en las ecuaciones y comprueba que efectivamente se cumplen las dos igualdades: 2·1 - 2 = 0; 2 - 2 = 0, "cierto" para la primera, 1 - 2 = -1, "cierto" para la segunda : **"Eso quiere decir que la solución del sistema es x = 1, y = -2."**

Lo que acabamos de hacer es resolver gráficamente el sistema de ecuaciones.

Ejemplo 2.- Resolver gráficamente el sistema de ecuaciones:

$$y=\frac{5}{2}-x$$
$$-2x=4-y$$



Habrás observado que la solución es: **x = -0,5 (-1/2) e y = 3.**

Resolución numérica

Ya has trabajado en clase resolviendo sistemas de ecuaciones y que existen varios métodos para ello, los dos ejemplos anteriores se resuelven fácilmente por cualquiera de ellos:

Por sustitución:

1- Se despeja una incógnita en una ecuación, por ejemplo la y en la primera: **y = -2x**
2.-Se sustituye dicho valor en la segunda: **x - 2x = -1**
3.- Se resuelve esta ecuación: -**x = -1 ; x = 1**
4.- Con este valor se halla el de la otra incógnita (paso 1): **y = -2**
Solución que naturalmente coincide con la obtenida antes gráficamente.
Ejemplo 1.-

$$\begin{cases} 2x+y=0 \\ x+y=-1 \end{cases} \begin{cases} y=-2x \\ x+(-2x)=-1 \end{cases} \begin{cases} \\ -x=-1 \Rightarrow x=1 \end{cases} \begin{cases} y=-2\cdot 1=-2 \\ \end{cases} \Big\}(1,-2)$$

Ejemplo 2.-

$$\begin{cases} y=\dfrac{5}{2}-x \\ -2x=4-y \end{cases} \begin{cases} 2y=5-2x \\ -2x+y=4 \end{cases} \begin{cases} 2y+2x=5 \\ -2x+y=4 \end{cases} \begin{cases} \\ y=4+2x \end{cases} \begin{cases} 2(4+2x)+2x=5 \\ \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} 8+4x+2x=5 \\ 6x=-3 \\ x=\dfrac{-1}{2} \quad como \quad y=4+2x=4+2\dfrac{-1}{2}=4-1=3 \end{array}\right| \left\{\left(\frac{-1}{2},3\right)\right.$$

Por reducción:
1.- Se consigue que al sumar o restar ambas ecuaciones, miembro a miembro, se elimine una incógnita. Para ello se simplifica todo lo posible y se multiplica, si es necesario, alguna ecuación por algún número. En este caso se pueden restar directamente una ecuación de la otra y se elimina la **y** : 1ª - 2ª : **x = 1**
2.- Se resuelve la ecuación resultante. En este caso ya lo está ya que hemos obtenido directamente la solución para la x: **x = 1.**
3.- Se sustituye esta solución en una de las dos ecuaciones y se resuelve hallando la otra incógnita. En este caso, sustituyendo **x = 1** en cualquiera de las dos ecuaciones se obtiene fácilmente **y = -2**.
Ejemplo 1.-

$$\begin{cases} 2x+y=0 \\ x+y=-1 \end{cases} \begin{matrix} (-1) & -2x-y=0 \\ & x+y=-1 \end{matrix} \Big\{ -2x+x=-1 \big\{ x=1 \big\{ y=-2$$

Ejemplo 2.-

$$\begin{cases} y=\dfrac{5}{2}-x \\ -2x=4-y \end{cases} \begin{cases} 2y=5-2x \\ -2x+y=4 \end{cases} \begin{cases} 2y+2x=5 \\ -2x+y=4 \end{cases} 2y+y=9 \Big\{ 3y=9 \Big\{ y=3 \quad \Big\{ -2x+3=4 \Big\{ x=\frac{-1}{2}$$

Por igualación
1.- Se despeja la misma incógnita de las dos ecuaciones, ya que tenemos despejada la **y**, lo hacemos en las dos, tenemos que **y = -2x** de una de las ecuaciones y de la otra **y = -1 - x.**
2.- Los dos miembros de las dos ecuaciones son iguales (o sea, **y**) por lo tanto, el segundo miembro también: **-2x = -1 – x** por lo tanto, **x = 1.**
3.- Se sustituye esta solución en una de las dos ecuaciones y se resuelve hallando la otra incógnita. En este caso, sustituyendo **x = 1** en cualquiera de las dos ecuaciones se obtiene fácilmente **y = -2**
Ejemplo 1.-

$$\begin{cases} 2x+y=0 \\ x+y=-1 \end{cases} \begin{cases} y=-2x \\ y=-1-x \end{cases} \Big\{ -2x=-1-x \big\{ -x=-1 \big\{ x=1 \qquad y=-2x=-2$$

Ejemplo 2.-

$$\begin{cases} y=\dfrac{5}{2}-x \\ -2x=4-y \end{cases} \begin{cases} y=\dfrac{5}{2}-x \\ y=4+2x \end{cases} \Big\{ \frac{5}{2}-x=4+2x \Big\{ \frac{5}{2}-4=3x \Big\{ \frac{-3}{2}=3x \Big\{ x=\frac{-1}{2} \quad \big\{ y=4-1=3$$

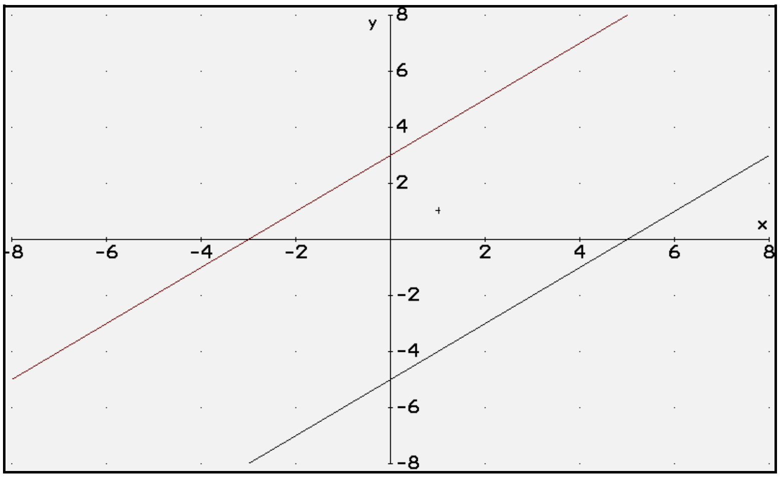
2.- Dos casos especiales

A.- Sistemas de ecuaciones que no tienen solución.

Ejemplo 3.- Resuelve por el método que quieras el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+1=y-2 \\ y+2=x-3 \end{cases}$

Seguramente habrás llegado a una expresión como **0 = -8** o algo parecido. ¿Qué significa?. Desde luego eso no es cierto, el número **0** NUNCA podrá ser el número –8, ni cualquier otro que no sea cero.

Observa la resolución gráfica

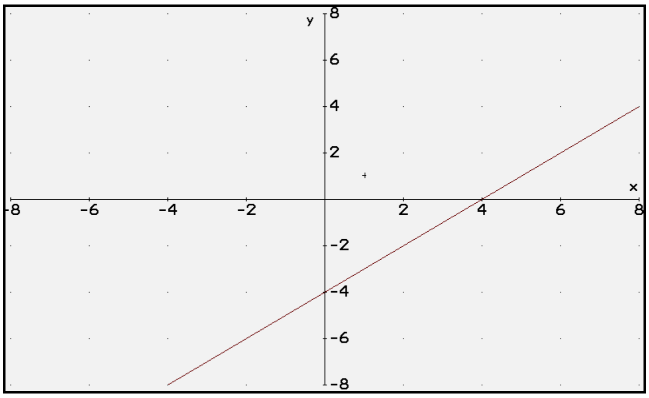


¡Las dos rectas son paralelas!, luego no hay punto de corte. Eso significa que el sistema de ecuaciones **no tiene solución**.

B.- Sistemas de ecuaciones con infinitas soluciones

Ejemplo 4.- Resuelve en el cuaderno de trabajo el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x-3=y+1 \\ 2x-2y=8 \end{cases}$

Ahora habrás llegado a la expresión **0 = 0** u **otro número = el mismo número**. ¿qué significa ahora?, la igualdad que has obtenido es cierta (claro *cero* es igual a *cero*) pero se te han eliminado la x y la y. ¿Cuál es entonces la solución?. Si la igualdad es cierta seguro ¿lo será para cualquier valor de x o de y?.



Observa la resolución gráfica:

¡Las dos ecuaciones corresponden a la misma recta!, luego las dos rectas son la misma y por tanto tienen todos los puntos comunes. En este caso cualquier punto de la recta es solución del sistema y se dice que el sistema tiene **infinitas soluciones** (los infinitos puntos de la recta)

¿cómo hallar las soluciones?:

Numéricamente se hallan dando valores a **x** o **y** en cualquiera de las dos ecuaciones (son las dos la misma) y obteniendo los correspondientes de la otra incógnita. Por ejemplo en la primera ecuación:

x - 3 = y + 1, podemos obtener para **y = 0**, **x = 4**; para **y = 2**, **x = 6**; para **y = -3**, **x = 1**; **etc**, todas ellas soluciones....

3.- Problemas de aplicación

Muchos problemas que se resuelven mediante ecuaciones pueden necesitar más de una incógnita y dar lugar por tanto a un sistema de ecuaciones. Por ejemplo:

Problema: Encuentra dos números sabiendo que la mitad de su suma es 5 y el doble de su diferencia es 8.

Planteamiento: Números: x e y.

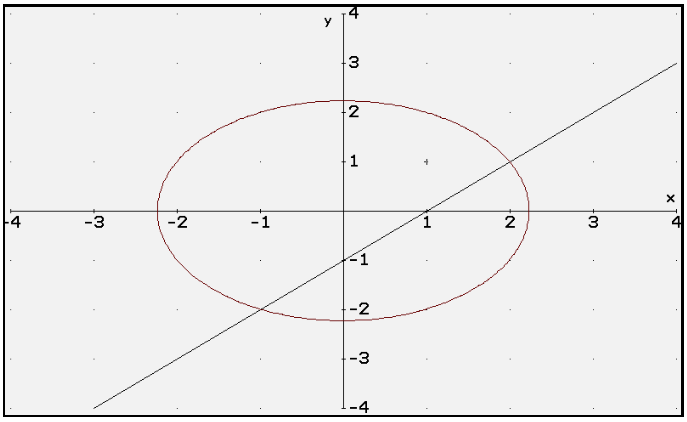
Ecuaciones: $\begin{array}{l} \dfrac{x+y}{2}=5 \\ 2(x-y)=8 \end{array}$

4.- Sistemas de ecuaciones de grado superior a uno

Los sistemas de ecuaciones de grado superior a uno (generalmente no se suelen resolver de grado mayor que 2), se resolverán gráficamente de forma idéntica a la vista para los de primer grado y de forma numérica por los mismos métodos comentados para el caso de primer grado.

Ejemplo 5.- Resolver el sistema formado por las ecuaciones: $x^2 + y^2 = 5$; $x - y = 1$.

Se observa gráficamente que los puntos de corte de ambas gráficas son **(2 , 1)** y **(-1 , -2),** de ahí las correspondientes soluciones que has debido de obtener para **x** e **y**.



$$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x-y=1 \end{cases} \begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x=1+y \end{cases} \{(1+y)^2+y^2=5 \quad \Rightarrow \quad y^2+2y+1+y^2=5$$

$$2y^2+2y-4=0 \Rightarrow \quad y^2+y-2=0 \Rightarrow \quad y=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}$$

$$y_1=\frac{-4}{2}=-2 \quad \textit{de la segunda ecuación} \quad x_1=1-2=-1 \qquad (-1,-1)$$

$$y_2=\frac{2}{2}=1 \; \textit{de la segunda ecuación} \quad x_2=1+1=2 \quad (2,1)$$

Ejemplo.- Resolver el sistema: $\begin{cases} x^2+y^2=45 \\ x-y=3 \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2+y^2=45 \\ x-y=3 \end{cases} \begin{cases} x^2+y^2=45 \\ x=3+y \end{cases} \{(3+y)^2+y^2=5 \quad \Rightarrow \quad y^2+6y+9+y^2=45$$

$$y^2+3y-18=0 \quad \begin{array}{l} y_1=3 \;\; \textit{de la segunda ecuación} \quad x_1=3+3=6 \qquad (6,3) \\ y_2=-6 \; \textit{de la segunda ecuación} \quad x_2=3-6=-3 \quad (-3,-6) \end{array}$$

Ejercicios.- Resolver los siguientes sistemas gráficamente y por cualquiera de los tres métodos. Procura aplicar los tres.

$\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=4 \end{cases}$ **(3,-1)** $\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=6 \end{cases}$ **(4,-2)** $\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=-4 \end{cases}$ **(-1,3)**

$\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=-6 \end{cases}$ **(-2,4)** $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x-y=4 \end{cases}$ **(2,0)** $\begin{cases} x+y=2 \\ x-2y=4 \end{cases}$ **(8/3,2/5)**

$\begin{cases} x+y=2 \\ 2x-3y=-6 \end{cases}$ **(0,2)** $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x-3y=4 \end{cases}$ **(2,0)** $\begin{cases} x+y=2 \\ 3x-2y=4 \end{cases}$ **(8/5,2/5)**

$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 2x - 3y = -6 \end{cases}$ **(0,2)** $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 2x - 3y = 4 \end{cases}$ **(3/2,-1/3)** $\begin{cases} 2x + 2y = 1 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$ **(1,-1/2)**

$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = -6 \end{cases}$ **no tiene** $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}$ **infinitas** $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x + 6y = -5 \end{cases}$ **no tiene**

$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - 4y = -6 \end{cases}$ **(0,3/2)** $\begin{cases} x - 3y = 4 \\ 2x - 3y = 4 \end{cases}$ **(0,-4/3)** $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$ **(3/2,1/4)**

$\begin{cases} 2(1-x) + 2y = 4 \\ 3(1+2x) - y = 2 \end{cases}$ **(0,1)** $\begin{cases} 2(1-2x) + y = -4 \\ 3(1+2x) - 2y = 2 \end{cases}$ **(13/2,20)** $\begin{cases} 3(1-x) + 2y = 4 \\ 2(1+2x) - 2y = 2 \end{cases}$ **(1,2)**

$\begin{cases} x - 2y = 2 \\ x^2 + y^2 = 7 \end{cases}$ $\begin{cases} y - x = -1 + x \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} 3xy - x + 12 = 0 \\ 3x + y = 8 \end{cases}$

5.- Sistemas de ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

$a)\begin{cases} 2\log 5 + y\log 25 = x\log 125 \\ x\log 4 - 2y\log 8 = \frac{1}{2}\log 64 \end{cases}$ $b)\begin{cases} \log_x(y-18) = 2 \\ \log_y(x+3) = \frac{1}{2} \end{cases}$

$c)\begin{cases} \log x + 3\log y = 5 \\ 2\log x = \log y + 3 \end{cases}$ $d)\begin{cases} 2\log x - \log(3x-5) = \log 5x - \log y \\ 2^{2x+1} = 4\cdot 8^{y+2} \end{cases}$

$\begin{cases} 2\log x - \log y = 5 \\ \log(xy) = 4 \end{cases}$ $(1000,10)$ $\begin{cases} \log(x+y) - \log(x-y) = \log 5 \\ 2^x = 4\cdot 2^y \end{cases}$ $(6,4)$

$\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ x + y = 70 \end{cases}$ $(20,50)$ $(50,20)$ $\begin{cases} \log x - \log y = 1 \\ x^2 - y^2 = 11 \end{cases}$ $\left(\frac{10}{3},\frac{1}{3}\right)$

$\begin{cases} 2\log x - 3\log y = 7 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases}$ $\left(100,\frac{1}{10}\right)$ $\begin{cases} x\log 2 + y\log 3 = \log 2592 \\ \log(x+y) = 2\log 3 \end{cases}$ $(5,4)$

$\begin{cases} \log_x(y-18) = 2 \\ \log_y(x+3) = \frac{1}{2} \end{cases}$ $\left(\frac{3}{2},\frac{81}{4}\right)$ $\begin{cases} \log_x(y+8) = 2 \\ \log_y(x-4) = \frac{1}{2} \end{cases}$ *No sol.*

$\begin{cases} \log(x+y) + \log(x-y) = \log 21 \\ a^x = \frac{a^7}{a^y} \end{cases}$ $(5,2)$